Problem 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -2 & 2 & x_2 \\ +1 & -1 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 + 2x_1 - x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{3x_1 - x_2 + x_3 = 0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 3 & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 3 & x_3 - x_1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 - 3x_2 + 3x_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0}$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -6 \quad +2 \quad -2 \quad +0 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/7 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -2/7\, x_3$

$x_2 = 1/7\, x_3$

x_3 is free

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Problem 2

$$x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3 =$$

$$x_1(\vec{v}_1+\vec{v}_3) + x_2(-2\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3) + x_3(-3\vec{v}_1-\vec{v}_2-6\vec{v}_3) =$$

$$(x_1+2x_2-3x_3)\vec{v}_1 + (x_2-x_3)\vec{v}_2 + (x_1+x_2-6x_3)\vec{v}_3 = \vec{0}$$

L.I. $\Rightarrow$

$$x_1+2x_2-3x_3=0$$
$$x_2-x_3=0$$
$$x_1-x_2-6x_3=0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(row operations: $+1$, $+2$, $+3$)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5x_3$

$x_2 = x_3$

x_3 is free

$$5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$$

Problem 3

1. False $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = I$

2. False $\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \cdots & \vec{0} \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{e}_2$

3. False $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. False $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ is L.I.

5. False $A = \vec{1} \quad B = I$

Problem 4.1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{+3 \quad -3 \quad +6 \quad +3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{+1 \quad +8 \quad +3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{+3 \quad -3 \quad +6 \quad +0}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{+1 \quad +8 \quad +3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Problem 4.2

$$\underset{B}{\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 & -\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2 & 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$\| \quad BA$$

if $BA = I$ then $\text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} \in \mathbb{R}^3$

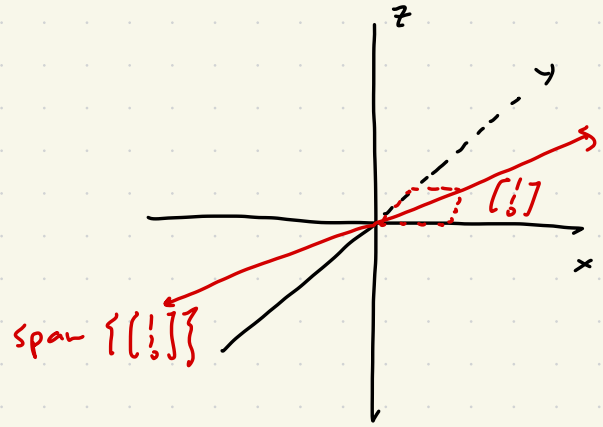
which is not possible because 2 vectors cannot span $\mathbb{R}^3$.

Problem 5

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{S^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{T^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{S^{-1}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{T^{-1}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \xrightarrow{S^{-1}} \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} \xrightarrow{T^{-1}} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$