Assignment 3 Solutions

CS132

Fall 2025

Basic Problems

1. $A\vec{r} = 4\begin{bmatrix} -10 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -40 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -30 \\ -15 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -56 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. not possible $\quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, $\vec{r} \in \mathbb{R}^{2}$

not equal

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -9 & 3 \\ 1^{-1} & -2^{+3} & 0^{-1} & -5^{+9} & 7^{-3} \\ -3^{+3} & 8^{-9} & -1^{+3} & 19^{-27} & -18^{+9} \\ -2^{+2} & 4^{-6} & 0^{+2} & 10^{-18} & -14^{+6} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & -1^{+1} & 2^{-1} & -8^{+4} & -9^{+4} \\ 0 & -2^{+2} & 2^{-2} & -8^{+8} & -8^{+8} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1^{-1} & -9^{+4} & 3^{+5} \\ 0 & 1 & -1^{+1} & 4^{-4} & 4^{-5} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3^{+3} & 0^{+0} & -5^{+0} & 8^{-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5 + 5x_4$

$x_2 = -1$

$x_3 = -5 + 4x_4$

x_4 is free

4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Yes. 1 pivot per row

5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1^{+1} & -1^{+2} & 2^{+0} & 9^{+4} \\ -1^{+1} & -2^{+2} & 1^{+0} & 1^{+4} \\ 0 & 2 & 6 & 36 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1^{-1} & 3^{-2} & 18^{-13} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No. Only 3 pivots

6. **No**, at most 3 pivots, and 5 rows.

7. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1^{+1} & 2^{-1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

No 1 pivot per column

8. **Yes**, at most 3 pivots, and 4 columns.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & -1 \\ -2^{+2} & 7^{-6} & 15^{-12} & 3^{-2} \\ 1^{-1} & -2^{+3} & -3^{+6} & 1^{+1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1^{-1} & 3^{-3} & 2^{-1} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3^{+3} & -6^{+9} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -3x_3$
$x_2 = -3x_3$
x_3 is free
$x_4 = 0$

$(-3, -3, 1, 0)$

$$-3\vec{r}_1 - 3\vec{v}_2 + \vec{r}_3 = \vec{0}$$

True / False

1. True
2. True
3. False $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
4. False $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
5. True
6. False $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
7. False. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
8. False. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

More Difficult Problems

1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 9 & 4 & h \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3^{+3} & 3^{+3} & -6^{-6} \\ 9^{-9} & 4^{-9} & h^{+18} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & (h+18) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2^{\,-10} \\ 0 & -5^{+5} & (h+18) \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & (h+18-10) \end{matrix}$$

$h = -8$

$v_3 = -2\vec{v}_2$

2. $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$